586. Kolmogoroff ノ論文紹介，I

小松　醇郎（阪大）

上ベッチ群及ビ環ニ関スル Kolmogoroff ノ論文ハ最近度々発表サレ，ソノ一部ヲ日本數學物理學會誌第11巻第1号ニ紹介シマシタ、然シ紹介シタ *Les groupes de Betti des espaces localement bicompakt* (C. R. t. 202) ニハ吉田，角谷君ノ御話ノ通リ Kolmogoroff ノ書キ誤リガアル様デス。

ソレ故此處デソノ点ヲ訂正シ[1]且ツ *Propriétés des groupes de Betti des espaces localement bicompacts* (C. R. t. 202) ヲ紹介シ定理ノ証明ヲ試ミテ見マス。尚又數物會誌ニ紹介シタ Alexander ノ第一ノ環[2]ニ就テノ結果[3]ヲ紹介シマス。

I

Ⓐ R: espace de Hausdorff localement bicompact

Ⓗ: groupe abélien bicompakt

J: groupe discrete abélien

---

1) Ⓑ ノ 4).

2) On the Ring of a Compact Metric Space, Proc. Nat. Acad. U.S.A. Vol. 21.

3) A. Kolmogoroff; Homologiering des Komplexes und des lokal-bicompakten Raumes. Recueil Mathématique t. 1 : 5.

r次元代數複体 $\bar{\varphi}^r$ ノ定義:

1) $\bar{\varphi}^r(\mathcal{E}_0,\cdots\cdots,\mathcal{E}_r)$ ハ R ノ中デ bicompakt ナ $(r+1)$ 個ノ任意ノ部分集合系 $\mathcal{E}_0,\cdots\cdots,\mathcal{E}_r$ ニ對シ一意ニ決定サレル。

2) $\bar{\varphi}^r$ ノ値ハⒽノ元。

3) $\bar{\varphi}^r$ ハ arguments 凡テニ對シ alternée.

4) $\bar{\varphi}^r$ ハ arguments 凡テニ就テ additive, 即チ

$$\bar{\varphi}^r(\mathcal{E}_0,\cdots\cdots,\mathcal{E}_i'+\mathcal{E}_i'',\cdots\cdots,\mathcal{E}_r)=\bar{\varphi}^r(\mathcal{E}_0,\cdots,\mathcal{E}_i',\cdots,\mathcal{E}_r)+\bar{\varphi}^r(\mathcal{E}_0,\cdots\cdots,\mathcal{E}_i'',\cdots\cdots,\mathcal{E}_r).$$

以上ノ複体 $\bar{\varphi}^r$ ノ集合ハ一ツノアーベル群 $\bar{\Phi}^r$.

$\bar{\Phi}^r$ ノ中デ次ノ條件 5) ヲ充ス複体 φ^r ハ部分群 Φ^r ヲ作ル。

5) $\varphi^r(\mathcal{E}_0,\cdots\cdots,\mathcal{E}_r)=0$. (Ⓗ ノ 0 元),

si $\bar{\mathcal{E}}_0\cdot\cdots\cdots\cdot\bar{\mathcal{E}}_r=0$.

下境界 (frontier) トシテノ Operator $g_u\Phi^r\subset\Phi^{r-1}$.

$$g_u\varphi^r\equiv\varphi^{r-1}(\mathcal{E}_0,\cdots\cdots,\mathcal{E}_{r-1})=\varphi^r(G,\mathcal{E}_0,\cdots\cdots,\mathcal{E}_{r-1}),$$

茲ニ $G\supset\bar{\mathcal{E}}_0+\bar{\mathcal{E}}_1+\cdots\cdots+\overline{\mathcal{E}_{r-1}}$, bicompact, ouvert.[1]

$g_u\varphi^r=0$ ナル輪体 (cycle) φ^r ノ集合ガ作ル群 Z^r.

$g_u\varphi^{r+1}=\varphi^r$ ナル境界 φ^r ノ集合ガ作ル群 Γ^r.

下ベッチ群[2] $B_u^r(R,Ⓗ)=Z^r-\Gamma^r$,

---

1) R ノ locally bicompact ノ條件ハ此処ニ必要。

2) Topologie ノ導入ハ數物會誌ノ通リ。

Ⓑ n次元代數複体 $\overline{f}^n$ ノ定義：

1) $\overline{f}^n(P_0, \text{-------}, P_n)$ ハ R ノ任意ノ $(n+1)$ 個ノ点ニ對シ一意ニ定マル。

2) $\overline{f}^n(P_0, \text{-------}, P_n)$ ノ値ハ群 J ノ元.

3) $\overline{f}^n$ ハソノ arguments 凡テニ對シ alternée.

4) 各 $\overline{f}^n$ ニ對シ有限個ノ bicompact[1], disjoint ナ部分集合。

系 $S_{\overline{f}^n}$ ガ一ツ存在シ次ノ條件ヲ充ス。

a) $\overline{f}^n(P_0, \text{-------}, P_n) = \overline{f}^n(P_0', \text{-------}, P_n')$, 茲ニ P_i ト P_i' トハ $S_{\overline{f}^n}$ ノ同一ノ élément ニ含マレルトキ。

b) $\overline{f}^n(P_0, \text{------}, P_n) = 0$ (J ノ 0 元), 茲ニ P_i ノ中ノ少クモドレカ一点ガ $R - S_{\overline{f}^n}$ ニ含マレルトキ。

以上ノ複体 $\overline{f}^n$ 全体ガアーベル群 $\overline{F}^n$[2].

$\overline{F}^n$ ノ中デ次ノ條件 5) ヲ充ス複体 $\overline{f}^n$ ハ Zéro ニ équivalent ト言ヒ部分群 $\overline{O}^n$ ヲ作ル。

5) R ノ凡ベテノ点 p ニ對シ一ツノ近傍 $V(p)$ ガ定マリ凡ベテノ $P_i \in V(p)$ ナラバ $\overline{f}^n(P_0, \text{-----}, P_n) = 0$.

---

1) 集合自身ハ ouvert デモ宜シ、fermeture ヲトレバ bicompact ニナルモノ, ソノ際 disjoint デナクナルコトモ可能。

2) $\overline{f}_1^n + \overline{f}_2^n$ ノ $S_{\overline{f}_1^n + \overline{f}_2^n}$ ハ $S_{\overline{f}_1^n}$, $S_{\overline{f}_2^n}$ ノ éléments 相互ノ Durchschnitt 及ビ差デ作ラルル部分集合系.

$F^r = \bar{F}^r \cdots\cdots \bar{0}^r$ ナル群＝ operator g_0.

$$g_0 f^r = f^{r+1}(P_0, \cdots\cdots, P_{r+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i f^r(P_0, \cdots\cdots, P_{i-1}, P_{i+1}, \cdots\cdots, P_{r+1}).$$

上ベッチ群 $B_0^r(R, J) = Z_0^r - H_0^r$.[1)]

II

定理 Ⓗ ト J トヲ互ヒニ Charakter group ニナルヤウニトレバ $B_0^r(R, J)$ ト $B_u^r(R, Ⓗ)$ トハ又互ヒニ Charakter group トナル。

証明 $\bar{f}^r \times \bar{\varphi}^r = \sum \bar{f}^r(P_{i_0}, \cdots\cdots, P_{i_r})$

$$\times \bar{\varphi}^r(M_{i_0}, \cdots\cdots, M_{i_r}).$$

茲ニ $M_1, \cdots\cdots, M_n$ ハ $S_{\bar{f}^r}$. P_i ハ M_i ニ含マルル任意ノ点; $(i_0, \cdots\cdots i_r)$ ハ $1, \cdots\cdots, n$ ノ内カラ任意 $(r+1)$ 個.

$\bar{f}_1^r$, $\bar{f}_2^r$, $\quad S_{\bar{f}_1^r} = \{M_1, \cdots\cdots, M_n\}$

$$S_{\bar{f}_2^r} = \{N_1, \cdots\cdots, N_p\}.$$

$$S_{\bar{f}_1^r + \bar{f}_2^r} = \{D_i, D_j, C_{ij}\} \begin{matrix} (i = 1, 2, \cdots\cdots, n) \\ (j = 1, 2, \cdots\cdots, p) \end{matrix}$$

茲ニ $C_{ij} = M_i \cdot N_j$; $D_i = M_i - \sum_j C_{ij}$; $D_j = N_j - \sum_i C_{ij}$

---

1) $g_0 g_0 f^r = 0^{r+2}$, $g_0 f^r = 0^{r+1}$ ナル f^r ガ作ル群 Z_0^r,

$g_0 f^{r-1} = f^r$ ナル f^r ノ作ル群 H_0^r.

$$(\bar f_1^r+\bar f_2^r)\times\bar\varphi^r=\sum_S(\bar f_1^r+\bar f_2^r)(q_{i_0},\text{------},q_{i_r})$$

$$\times\bar\varphi^r(Q_{i_0},\text{------},Q_{i_r}).$$

但シ $Q_i\subset S_{\bar f_1^r+\bar f_2^r}$.

$$=\sum_S\bar f_1^r(q_{i_0},\text{------},q_{i_r})\times\bar\varphi^r(Q_{i_0},\text{----},Q_{i_r})$$

$$+\sum_S\bar f_2^r(q_{i_0},\text{----},q_{i_r})\times\bar\varphi^r(Q_{i_0},\text{------},Q_{i_r})$$

$$=\sum_{S_{\bar f_1^r}}\bar f_1^r(P_{i_0},\text{------},P_{i_r})\times\bar\varphi^r(M_{i_0},\text{------},M_{i_r})$$

$$+\sum_{S_{\bar f_2^r}}\bar f_2^r(P_{i_0},\text{-----},P_{i_r})\times\bar\varphi^r(N_{i_0},\text{-----},N_{i_r})$$

$$=\bar f_1^r\times\bar\varphi^r+\bar f_2^r\times\bar\varphi^r.$$

即チ $\bar\varphi^r$ ハ群 $\bar F^r$ ヲ *real member mod.* 1 ノ群 K＝ *homomorph* ＝ *abbilden* スル. 逆＝ $\bar F^r$ ノ K ヘノ一ツノ *homomorph.* ノ *Abbildung* π 任意＝與ヘルトキソレヲ與ヘルヤウナ複体 $\bar\varphi^r$ 唯一ツ存在ス、何トナレバ

$S_{\bar f_1^r}$ ト等シイ *Mengensystem* ヲ持ツ複体 $\bar f^r$ ノミ考ヘレバ $\bar F^r$ ノ一ツノ部分群 $\bar F^r(S_{\bar f_1^r})$ ヲ作リ丁度 $(n-1)$ 次元單体上ノ r 次元複体ノ群ト *isomorph.*

丁度 $\bar F^r(S_{\bar f_1^r})\xrightarrow{\pi}K$ ヲ與ヘル双對ノ複体群ガ單体上デ考ヘラル。即チ $\binom{n}{r+1}$ 個ノ $(r+1)$ 次元單体ヲ *Argument* トスル函数値ガ定マル。ソノ値ヲ求ムル $\bar\varphi^r$ ハトルトスレバ

良イ、斯クテ凡ベテノ複体 $\bar{f}_i^r$ ノ $S_{\bar{f}_i^r}$ ニツキ $\bar{\varphi}^r(N_{i_0},\text{------}$

$\text{-----}, N_{i_r})$ ノ値ガ定マル。

函數 $\bar{\varphi}^r$ ガ *bicompact* ノ集合 $(\mathcal{E}_0,\text{-------},\mathcal{E}_r)$ ニ對シトル値ヲ強制的ニ定メタガソレハ條件 1) —— 4) ヲ充シテ居ル。*Additive* ナルコトハ

$$S_{\bar{f}_1^r}=\{M_0+M_0',\ M_1,\text{-------},M_r\},\quad S_{\bar{f}_2^r}=\{M_0',\text{-----},M_r\}$$

$$\pi\bar{f}_1^r=\bar{f}_1^r(P_0,\text{-------},P_r)\times\bar{\varphi}^r(M_0+M_0',\text{----},M_r)=\bar{f}_1^r\times\alpha,$$

$$\pi\bar{f}_2^r=\bar{f}_2^r(P_0',\text{----},P_r)\times\bar{\varphi}^r(M_0',\text{------},M_r)=\bar{f}_2^r\times\beta,$$

$$\begin{aligned}\pi(\bar{f}_1^r-\bar{f}_2^r)&=(\bar{f}_1^r-\bar{f}_2^r)(q_0,P_1,\text{------},P_r)\times\bar{\varphi}^r(M_0,\text{----},M_r)\\&\quad+(\bar{f}_1^r-\bar{f}_2^r)(P_0',\text{----},P_r)\times\bar{\varphi}^r(M_0',\text{----},M_r)\\&=\bar{f}_1^r\times\bar{\varphi}^r(M_0,\text{----},M_r)+\{\bar{f}_1^r(P_0',P_1,\text{---},P_r)-\bar{f}_2^r(P_0',\text{---},P_r)\}\\&\qquad\times\bar{\varphi}^r(M_0',\text{-------},M_r)\\&=\bar{f}_1^r\times x+\bar{f}_1^r\times\beta-\bar{f}_2^r\times\beta.\end{aligned}$$

Homomorphismus ヨリ

$$\pi(\bar{f}_1^r-\bar{f}_2^r)=\bar{f}_1^r\times\alpha-\bar{f}_2^r\times\beta.$$

$$\therefore\quad \bar{f}_1^r\times x=\bar{f}_1^r\times\alpha-\bar{f}_1^r\times\beta=\bar{f}_1^r\times(\alpha-\beta).$$

$\bar{f}_1^r=\bar{f}_1^r(P_0,\text{--------},P_r)$ ハ任意ノ J ノ元ヲトルヲ得。同一ノ α,β（Ⓗ ノ元）ガ成立スルノダカラ

$$x=\alpha-\beta.$$

$$\therefore\quad \bar{\varphi}^r(M_0+M_0',\ M_1,\text{--------},M_r)=\bar{\varphi}^r(M_0,\text{----},M_r)+\bar{\varphi}^r(M_0',\text{-------},M_r).$$

$F^r\longrightarrow 0$ ニ移ス $\bar{\varphi}^r$ ハ，皆 0 ナル値ヲトル函數ナルコト明

ナル故ニ

$$\overline{F}^r \text{ ト } \overline{\Phi}^r \text{ トハ互ヒニ Charaktergroup.}$$ [1]

部分群 $\overline{O}^r$ ト Φ^r トハ Annulator.

$$\bar{f}_1^r \in \overline{O}^r, \quad S_{\bar{f}_1^r}$$

$$\bar{f}_1^r \times \varphi^r = \sum_{S_{\bar{f}_1^r}} \bar{f}_1^r(P_{i_0}, \cdots\cdots, P_{i_r}) \times \varphi^r(M_{i_0}, \cdots\cdots, M_{i_r})$$

$$\overline{M_{i_0}} \cdot \cdots\cdots \cdot \overline{M_{i_r}} = 0 \text{ ナラ } \varphi^r = 0, \quad \overline{M}_{i_0} \cdot \cdots\cdots \cdot \overline{M}_{i_r} \supset p$$

ナラバ

$$\varphi^r \neq 0, \text{ 然シ } \bar{f}_1^r(P_{i_0}, \cdots\cdots, P_{i_r}) = 0$$

$$(P_i \subset V(p), \ P_i \subset M_i).$$

$$\therefore \ \bar{f}_1^r \times \varphi^r = 0$$

逆ニ $\bar{\varphi}^r \notin \Phi^r$ ナラ $\overline{M}_0 \cdot \cdots\cdots \cdot \overline{M}_r = 0$ 且ツ

$$\bar{\varphi}^r(M_0, \cdots\cdots, M_r) \neq 0.$$

故ニ $S_{\bar{f}_1^r} = \{M_0, \cdots\cdots, M_r\}$, $\bar{f}_1^r \in \overline{O}^r$ ナル $\bar{f}_1^r$ ヲトレバ

$$\bar{f}_1^r \times \bar{\varphi}^r \neq 0.$$

以上ニヨリ $\overline{F}^r - \overline{O}^r = F^r$ ト Φ^r トハ互ヒニ Charaktergroup.

次ニ $f^r \times g_u \varphi^{r+1} = g_0 f^r \times \varphi^{r+1}$ [2]

---

1) $\Phi^r \to K$ ハ stetig homomorph デアル。

2) A. Kolmogoroff; Über die Dualität im Aufbau der kombinatorischen Topologie. Recueil Mathématique t 1. (97–102) ト同様。

故ニ $B_u^{r}(R, \textcircled{H})$ ト $B_0^{r}(R, J)$ トハ Charakter-group.

III

補助定理．単体 x^s デーツノ上輪体 Z_0^r $(r \leqq s)$ ハ 0-homolog Null 即チ x^s デ $g_0 f^{r-1} = Z_0^r$ ナル如キ $(r-1)$ 次元複体ガ存在ス。

証明．x^s デ一点 P ヲトリ x^s ノ凡ベテノ x^{r-1} ニ就キ

$$\begin{cases} f^{r-1}(x^{r-1}) = Z^r(+P\cdot x^{r-1}), & x^{r-1} \text{ ガ点 } P \text{ ヲ含マヌトキ} \\ f^{r-1}(x^{r-1}) = 0. & x^{r-1} \text{ ガ点 } P \text{ ヲ含ムトキ.} \end{cases}$$

ト定メル．任意ノ x^r ガ点 P ヲ含マナイナラバ

$$(g_0 f^{r-1})(x^r) = (-1)^i f^{r-1}(x_i^{r-1})^{1)}$$
$$= (-1)^i Z^r(+P\cdot x_i^{r-1})$$

假定ヨリ

$$g_0 Z^r(P\cdot x^r) = (-1)^{i+1} Z^r(+P\cdot x_i^{r-1}) + Z^r(x^r) = 0$$
$$\therefore \quad g_0 f^{r-1} = Z^r(x^r).$$

Alexander ノ第一ノ Homologiering ハ是ヲ使ヘバ trivial ニナル、即チ

$$(f^r \cdot f^s) = f^{r+s+1}(x^{r+s+1})$$
$$= \frac{1}{2}\sum f^r(x^r) f^s(x^s).$$

茲ニ x^{r+s+1} ハ fremd ナ単体 x^r ト x^s トガ張ル単体；和ハ x^{2+s+1} ヲ斯様ナ r 次元単体ト s 次元単体トノ張ル形ニ分ケラレル

---

1) $x^r = (a_0, \text{-----}, a_i, \text{------} a_r)$ トスレバ

$x_i^{r-1} = (a_0, \text{------}, a_{i-1}, a_{i+1}, \text{------}, a_r)$

凡エル場合ニ付キ加エル。

$$u_0^{r+s+1} = (z_0^r \cdot z_0^s) = 0.$$

何トナレバ任意ノ x^{r+s+1} ニテ

$$\begin{aligned} u^{r+s+1}(x^{r+s+1}) &= \frac{1}{2}\sum z_0^r(x^r)\cdot z_0^s(x^s) \\ &= e^0 f^{r-1} \cdot e^0 f^{s-1} \\ &= \pm e^0 e^0 f^{r-1} f^{s-1} = 0^{1)} \end{aligned}$$

各 x^{r+s+1} ニテ u^{r+s+1} ノ値ハ 0.

---

1) $g_0 f^{r-1} = e^0 f^{r-1}$, e^0 ハ $e^0(+p) = 1$, $e^0(-p) = -1$ ナル 0 次元複体.

群ノ元トシテデナク単ニ値ノ計算ノタメニ f^{r-1}, f^{s-1} ヲ持ツテ来タ.